

2. Potenssit

Potenssien määrittelyn perustilanne on se, missä **kantaluku** on mikä tahansa reaaliluku ja eksponentti positiivinen **kokonaisluku**. Olkoon siis $a \in \mathbb{R}$ ja $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Tällöin potenssi määritellään peräkkäisten kertolaskujen lyhennysmerkintänä

$$a^n = a * a * a * \dots * a, \text{ missä tekijöitä on } n \text{ kpl.}$$

Esimerkkejä. $3^2 = 3 * 3 = 9$, $2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$.

Huomaa, että esimerkiksi koska $3^2 \neq 2^3$, niin yleisesti ei voida vaihtaa kantalukua ja eksponenttia keskenään.

Esimerkki. $(-2)^4 = -2 * (-2) * (-2) * (-2) = 16$

Peräkkäisissä kertolaskuissa vastauksen etumerkki saadaan helpoiten laskemalla negatiivisten lukujen määrä, jolloin pätee:

pariton määrä negatiivisia lukuja -> negatiivinen tulos ja parillinen määrä negatiivisia lukuja -> positiivinen tulos.

Esimerkki. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2*2*2}{3*3*3} = \frac{8}{27}$. Siis moninkertaisissa murtolukujen kertolaskuissa voidaan kertoa kaikki osoittajat ja kaikki nimittäjät kerralla keskenään.

Esimerkki. Laskimessa potenssiin korotusta vastaa näppäin, jossa on esimerkiksi $^$ tai x^y . Tarkista, että saat laskimella laskettua seuraavan:

$$12,546^4 \approx 24775,426.$$

Laskujärjestyslistassa potenssiin korotus tulee heti sulkeiden jälkeen ennen kerto- ja jakolaskuja.

Esimerkki. $4^2 - (-1)^3 = 16 - (-1) = 17$.

Huomautus. Siis potenssissa $(-2)^4$ kantaluku on -2 , joka siis on korotettava potenssiin 4 eli $(-2)^4 = 16$. Sen sijaan -2^4 tarkoittaa sitä, että ensin korotetaan kantaluku 2 potenssiin 4, jonka jälkeen lisätään vasta etumerkki -. Siispä $-2^4 = -(2 * 2 * 2 * 2) = -16$.

Varmista, että ymmärrät näiden eron.

Seuraavaksi haluttaisiin määritellä myös sellaiset potenssit, missä eksponentti on 0 tai negatiivinen kokonaisluku. Selvästikään edellä ollutta määritelmää (kun eksponentti on positiivinen kokonaisluku) ei voida käyttää, koska et voi kertoa lukua itsellään vaikkapa -2 kertaa. Määritellään nämä potenssit seuraavalla tavalla:

$$a^0 = 1 \text{ aina kun kantaluku } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ kun } n = 1, 2, 3, \dots \text{ ja } a \neq 0.$$

Huomautuksia. Siis kun eksponentti on 0 tai negatiivinen, ei kantelukuna saa olla 0, kaikki muut kantaluvut kyllä kelpaavat. Perustellaan näiden määritelmien mielekkyys hieman myöhemmin, sinälläänhän matematiikassa ei määritelmä voi olla koskaan varsinaisesti väärä. Siis negatiivinen eksponentti saadaan muutetuksi positiiviseksi, kun potenssi samalla korvataan käänteisluvullaan.

Esimerkkejä. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2*2*2} = \frac{1}{8}$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{-3 * (-3)} = \frac{1}{9}.$$

$$-3^{-2} = -(3^{-2}) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}.$$

Siis ole aina tarkkana sen kanssa, että mikä kulloinkin on kantelukuna!

Potensseille pätevät seuraavat laskusäännöt:

1. $a^m * a^n = a^{m+n}$ (samankantaisten potenssien tulo)
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (samankantaisten potenssien osamäärä)
3. $(a * b)^n = a^n * b^n$ (tulon potenssi)
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (osamäärän potenssi)
5. $(a^m)^n = a^{m*n}$ (peräkkäiset potenssit)

Huomautuksia. Edellä olevissa laskusäännöissä eksponentit m ja n saavat olla mitä tahansa kokonaislukuja, myös negatiivisia. Kantalukuna saa myös olla mikä tahansa luku edellyttäen, että potenssit ovat määriteltyjä.

Positiivisille eksponenteille kaavat on helppo todistaa suoraan potenssin määritelmän avulla. 0:s ja negatiiviseksponenttinen potenssi puolestaan määriteltiin täsmälleen sillä tavalla, että potenssilait pätisivät myöskin niissä tilanteissa. Tässä ei ollut edes mitään valinnan varaa, vaan jos näistä potenssilaeista halutaan pitää kiinni, on määritelmät tehtävä juuri sillä tavalla kuin tehtiin.

Kuten kaikki kaavat matematiikassa, niin myös nämä potenssikaavat toimivat molempiin suuntiin. Riippuen tilanteesta joskus niitä käytetään vasemmalta oikealle, joskus oikealta vasemmalle.

Kaavat 1, 3 ja 5 yleistyvät luonnollisella tavalla myös useammillekin luvuille.

Esimerkkejä. $3^2 * 3^{-3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ (kaava nro 1)

$$(5^{-1})^{-2} = 5^{-1*(-2)} = 5^2 = 25 \quad (\text{kaava nro 5})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32} \quad (\text{kaava nro 4}).$$

Huomautus. Kaavat 3 ja 4 kertovat, että tulossa ja osamäärässä on sallittua korottaa erikseen. Eräs todella tyypillinen virhe on se, että korottaa myöskin summassa tai erotuksessa samalla tavoin, mutta näin siis EI saa tehdä! Siis

$(1 + 1)^3 = 2^3 = 8$, mikä ei ole sama kuin $1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$.